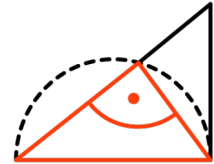


Sommersemester 2009
Dr. Reimund Albers



Modul EM1: Mathematisches Denken in Arithmetik und Geometrie

Modulabschlussklausur

Name: _____ Mat.Nr.: _____

BA (FBW) P oder SI
bitte ankreuzen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
maximal	6	10	8	11	10	14	12	71
erreicht								

Zugelassene Hilfsmittel:

4 Seiten (einseitige Blätter) eigene Aufzeichnungen, Taschenrechner

Bitte weisen Sie sich durch einen Lichtbildausweis aus.

S o S e

2 0 0 9

Grundsätzliches: Eine Klausur ist eine Gelegenheit, dem Prüfer zu zeigen, was Sie alles wissen. Es ist also in Ihrem Interesse, dass Ihre Ausführungen lesbar, verständlich und logisch nachvollziehbar sind. Für Studierende des Lehramts ist eine Klausur immer auch eine Prüfung für die Fähigkeit, mathematische Dinge klar und verständlich darzustellen.

1. vollständige Induktion

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

2. Basissysteme

(Die Basiszahl ist jeweils als Index angehängt. Zahlen ohne Index sind stets im Zehnersystem gemeint.)

a. Umwandlungen (Die einzelnen Rechenschritte sind Teil der Bewertung)

- i. Wandeln Sie 97_{10} um in das Zweiersystem.
- ii. Wandeln Sie 13142_5 um in das Zehnersystem.
- iii. Wandeln Sie $A7_{16}$ um in das Zweiersystem
(Achtung: Hier ist ein schneller Weg möglich.)

b. In welchem Basissystem ist 41605_b teilbar durch

- i. b ?
- ii. $b+1$?

3. Abbildungen geometrisch

Auf dem beigelegten Arbeitsblatt ist das Dreieck ABC und das Dreieck $A'''B'''C'''$ gezeichnet. Es gilt: $\triangle ABC \cong \triangle A'''B'''C'''$. Da der Umlaufsinn vom Dreieck $A'''B'''C'''$ verschieden ist von dem des Dreiecks ABC , gibt es drei Spiegelungen, deren Verknüpfung das Dreieck ABC auf das Dreieck $A'''B'''C'''$ abbildet. Gesucht sind nun drei Achsen a , b und c von drei Spiegelungen, so dass die Verknüpfung $S_c \circ S_b \circ S_a$ das Dreieck ABC auf das Dreieck $A'''B'''C'''$ abbildet.

Bedingung: Die zweite Spiegelachse b soll senkrecht zur Dreiecksseite $\overline{A''B''}$ sein.

- a. Konstruieren Sie auf dem Arbeitsblatt die Achsen a , b und c .
- b. Beschreiben Sie, wie Sie die Achsen a , b und c festgelegt/konstruiert haben.

4. Matrizenrechnung

In der Vorlesung hatten wir zu den einschlägigen Abbildungen die Matrizen aufgestellt, indem wir die Bilder der beiden Basisvektoren \vec{e}_1 und \vec{e}_2 bestimmt hatten.

Gehen Sie genau so vor für folgende Abbildungen:

- a. Die Spiegelung an $x_2 = -x_1$.
- b. Die Drehung um den Ursprung um 135° .

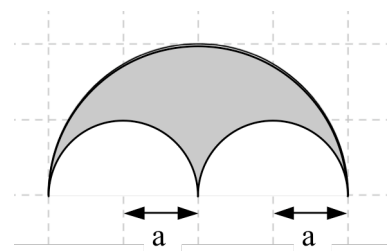
Vergleichen Sie jeweils Ihr Ergebnis mit der in der Vorlesung bestimmten allgemeinen Matrix.

- c. Bilden Sie den Punkt $A(2;4)$ mit den beiden in a. und b. angegebenen Abbildungen ab
 - i) Rechnerisch mit der von Ihnen aufgestellten Abbildungsgleichung.
 - ii) Zeichnerisch in einem Achsenkreuz.Stimmen jeweils Rechnung und Zeichnung überein?

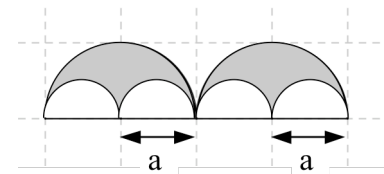
5. Arbelos

Gegeben ist ein symmetrisches Arbelos (siehe Skizze Arbelos 1) und ein daraus abgeleitetes „Doppelarbelos“ (siehe Skizze Arbelos 2).

- Konstruieren Sie Arbelos 2 passend zum vorgegebenen Arbelos 1 auf dem beiliegenden Arbeitsblatt.
(Aufgabenteile b bis d bitte auf normalem Arbeitspapier bearbeiten.)
- Erstellen Sie eine Konstruktionsbeschreibung zu a.
- Berechnen Sie Umfang und Fläche der Ausgangsfigur (Arbelos 1).
- Berechnen Sie Umfang und Fläche der beiden kleinen Arbelos zusammen (Arbelos 2).
- Die mit Arbelos 1 und Arbelos 2 begonnene Folge wird einen Schritt weiter fortgesetzt. Das ist in der Tabelle auf dem Arbeitsblatt angedeutet. Vervollständigen Sie diese Tabelle.



Skizze Arbelos 1



Skizze Arbelos 2

6. Dimension

A. Cantormenge

Wir betrachten das Intervall $[0,1]$ (Initiator) (Stufe 0) auf einem Zahlenstrahl.

Aus diesem Intervall wird das mittlere Drittel, also das offene Intervall $\left] \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right[$ entfernt.

Stufe 1: Übrig bleiben zwei Drittel des Intervalls,

die geschlossenen Intervalle $\left[0, \frac{1}{3} \right]$ und $\left[\frac{2}{3}, 1 \right]$.

Die Konstruktionsvorschrift lautet: „Entfernen Sie jeweils das mittlere Drittel aus dem Intervall.“ Sie wird beliebig (unendlich) oft auf die Restintervalle angewendet. Die entstehende Menge wird nach dem Mathematiker Cantor benannt mit Cantor-Menge oder auch Cantor-Staub.

- Interpretieren Sie diese Angabe grafisch. Wie wird eingeteilt und was wird „weggewischt“
Fertigen Sie eine Skizze an für die 0., 1., 2. und 3. Stufe.
- Kreuzen Sie an, welche Zahlen zur Cantormenge gehören:

$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{243}$	$\frac{24}{27}$	$\frac{57}{81}$	$\frac{36}{81}$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
- Begründen Sie, warum es sich hier um eine selbstähnliche Figur handelt und bestimmen Sie die zugehörige Dimension.
- Von dem Intervall $[0,1]$ wird, ähnlich wie oben, die Hälfte der Strecke entfernt, also das offene Intervall $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$. Führen Sie wiederum unendlich viele Konstruktions Schritte durch. Beschreiben Sie die Grenzmenge. Fertigen Sie eine Skizze an und erklären Sie Ihr Ergebnis? Argumentieren, begründen Sie.

noch Aufg 6

B Fraktale und ihre Dimension

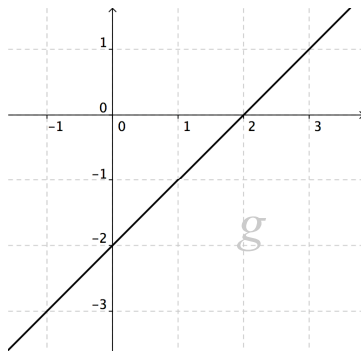
Auf dem beiliegenden Arbeitsblatt finden Sie 3 Abbildungen

Entscheiden Sie, ob es um eine exakt selbstähnliche Figur handelt und erklären Sie Ihr Ergebnis. Berechnen Sie gegebenenfalls die Selbstähnlichkeitsdimension.

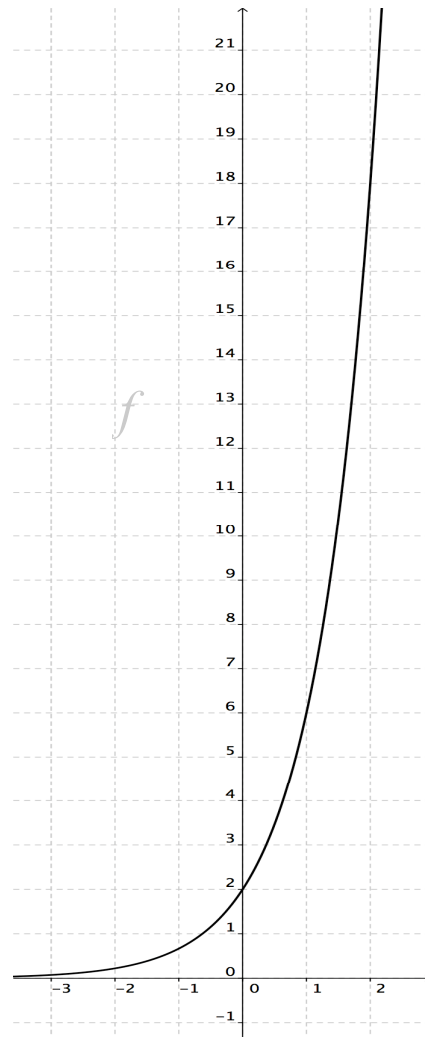
7. Funktion

Lineares und exponentielles Wachstum

- a. Die Abbildungen rechts zeigen die Graphen zweier Funktionen, g und f . Geben Sie die Funktionsgleichungen an und begründen Sie Ihr Ergebnis.



- b. Die Funktionen f und g aus Aufgabe a) sollen zur Modellierung von Wachstumsvorgängen herangezogen werden. Charakterisieren Sie das Wachstum in beiden Fällen und nennen Sie jeweils ein Anwendungsbeispiel.

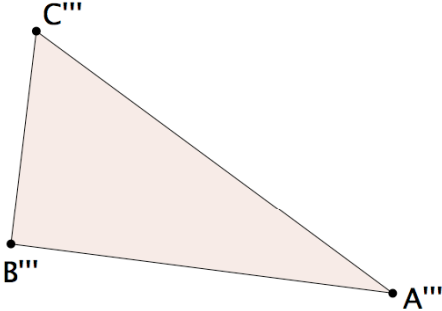
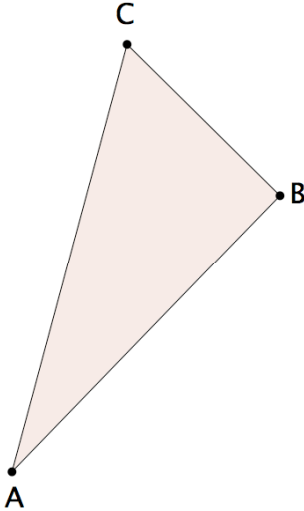


Im Folgenden soll der Abbau von Schmerzmitteln im Körper mathematisch modelliert werden. Die Firma "Radiofarn" testet ein neues Schmerzmittel, um festzustellen, wie lange nach der Einnahme des Präparats ein Patient nicht am Straßenverkehr teilnehmen kann.

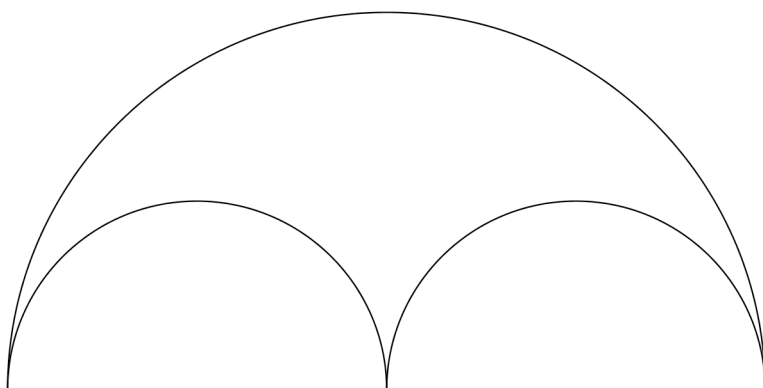
Eine Versuchsperson erhält eine anfängliche Dosis von 10 Milligramm pro Kilogramm Körpergewicht. In stündlichem Abstand wird dann die Konzentration des Wirkstoffs gemessen. Das Ergebnis ist in folgender Tabelle dargestellt:

Zeit (in Stunden)	0	1	2	3	4	5
Konzentration (in mg/kg Körpergewicht)	10	7,20	5,18	3,72	2,68	1,93

- c. Begründen Sie durch eine Rechnung, dass der Wirkstoff im Körper exponentiell abgebaut wird.
- d. Bestimmen Sie die Funktion, die die Konzentration des Wirkstoffs als Funktion der Zeit angibt.
- e. Reaktionstests haben ergeben, dass Fahrtauglichkeit im Straßenverkehr erst mit einer Konzentration von weniger als 1 mg/kg gewährleistet ist. Berechnen Sie, wie lange die Versuchsperson mindestens warten muss, bis sie wieder ein Fahrzeug führen darf. [Sollten Sie Aufgabe d) nicht gelöst haben, verwenden Sie in dieser Aufgabe die Funktion c mit $c(t) = 11 \cdot 0,8^t$.]






Vorgegebenes Arbelos 1



Ihre Konstruktion für Arbelos 2: (Achten Sie auf zueinander passende Maße)



	Umfang	Fläche
 Arbelos 1	1	1
 Arbelos 2		
 Arbelos 3		

